Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

рівень ***магістр***

на тему ***«Поведінка розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння»***

Виконав: студент групи МП62 II курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 113 "Прикладна математика" освітньо-професійної програми "Прикладна математика"
ШЕВЧУК Дарина

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики
СТЄПАНОВА Катерина

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця
ДЕНИСОВА Тетяна

Харків — 2024 рік

Анотації

Шевчук Дарина Романівна. Поведінка розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння. У даній кваліфікаційній роботі досліджується поведінка узагальненого (енергетичного) розв'язку задачі Коші-Діріхле для нелінійного параболічного рівняння в циліндричній області. Основний результат роботи формулюється у вигляді Теореми 4.1, що доведена для довільної фінітної початкової функції при певних обмеженнях на граничні умови.

Ключові слова: початково-крайова задача, локалізація розв'язку, нелінійні параболічні рівняння, повільна дифузія.

Shevchuk Daryna. The behavior of solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation. In this qualification work, we study the behaviour of the generalised (energy) solution of the Cauchy-Dirichlet problem for a nonlinear parabolic equation in the cylindrical domain. The main result of the work is formulated in the form of Theorem 4.1, which is proved for an arbitrary finite initial function under certain restrictions on the boundary conditions.

Keywords: initial boundary value problem, solution localisation, nonlinear parabolic equations, slow diffusion.

Зміст

Вступ

Рівняння в частинних похідних широко застосовуються в різних галузях науки, таких як, наприклад, фізика, інженерія та хімія. Зокрема, параболічні рівняння дозволяють моделювати процеси теплопровідності, дифузії речовин і динаміку рідин, що має велике значення для вивчення багатьох природних і техногенних явищ. Враховуючи важливість таких рівнянь, розв'язання задач, пов'язаних із дослідженням поведінки їх розв'язків, дозволяє глибше розуміти фундаментальні процеси, що протікають у середовищах зі змінною концентрацією речовин або під впливом деяких хімічних реакцій. Це знання стає основою для створення нових технологій та вдосконалення існуючих методів в області матеріалознавства, екології, біології та багатьох інших дисциплінах.

Одна з головних цілей роботи полягає в аналізі поведінки розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння в циліндричній області за умови деяких структурних обмежень, що відповідають процесу повільної дифузії. Дослідження подібних процесів дозволяє зрозуміти, як розподіляється концентрація речовини в просторі та часі, враховуючи початкові та крайові умови, що є важливим для застосувань у фізиці та інженерії.

Метою кваліфікаційної роботи є доведення достатньої умови локалізації розв'язку початково-крайової задачі для нелінійного параболічного рівняння (Теорема (4.1)). Така локалізація є цікавим явищем в теорії рівнянь у частинних похідних, оскільки вона дозволяє звузити розгляд області, де відбуваються суттєві зміни концентрації або температури, що може бути корисним при моделюванні обмежених у просторі процесів.

Результатом роботи стало отримання необхідних інтегральних співвідношень та оцінок, які визначають наявність властивості локалізації розв'язку. Це дозволяє встановити межі, в яких відбувається еволюція системи, що є ключовим для прогнозування поведінки багатьох фізичних процесів у різних умовах.

Основний результат – Теорема 4.1, що представлена у роботі, – формулює достатню умову для локалізації носія розв'язку в рамках заданих початкових умов і граничних режимів. Дана теорема є результатом продовження досліджень, що проводилися в рамках кваліфікаційної роботи для здобуття ступеня бакалавра [1]. Крім того, результат [1] був представлений до обговорення на міжнародній конференції DECT-2023 [2] та продовження цього результату було опубліковано в статті, співавтором якої є мій науковий керівник – Стєпанова Катерина Вадимівна, в журналі «Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Сер. Математика, прикладна математика та механіка» [3].

Для простоти розуміння розглянемо модельне рівняння, яке є частковим випадком p-Лапласового оператора:

$$u_t - \Delta_p u = 0,$$

тут

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{t} > 0, \quad n \geq 1;$$

$$p \text{ – дійсне додатнє число.}$$

Параметр p впливає на властивості оператора Δ_p. Залежно від значення p, цей оператор може бути виродженим або сингулярним, що додає деякої складності при його аналізі.

Варто окремо та більш детально розглянути еліптичний оператор, що з'являється у цьому рівнянні:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = |\nabla u|^{p-4}|\nabla u|^2\Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

У критичних точках, де $\nabla u = 0$, оператор є виродженим для $p > 2$ і сингулярним при $p < 2$.

Розглянемо різні випадки значень параметра p:

- при $p = 1$ $\quad \Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_u}{|\nabla_u|}\right) = -H$, де H є оператором середньої кривини;

- при $p = 2$ маємо звичайний оператор Лапласа:

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2};$$

- при $p = \infty$:

$$\Delta_p u \equiv |\nabla u|^{p-4}\left(|\nabla u|^2\Delta u + (p-2)\Delta_\infty u\right) = 0$$

  є граничним рівнянням при $p \to \infty$.

Оператор Δ_p – це важливий математичний інструмент, який допомагає описувати процеси в багатьох фізичних і наукових областях. Наприклад, його використовують у реології для дослідження того, як матеріали змінюють форму під дією різних сил, а в гляціології – для аналізу руху і деформації льоду. У задачах з низьким значенням p, цей оператор підходить для моделювання речовин, що протікають з невеликим опором, як-от деякі рідини. Коли p зростає, Δ_p стає корисним для опису більш жорстких матеріалів, які важко деформувати.

Цікавим є те, що оператор p-Лапласа використовується і для моделювання складних випадкових процесів, зокрема броунівського руху, де хаотичні переміщення частинок можна описати через похідні різних порядків. У крайньому випадку, коли p прямує до нескінченності, Δ_p наближається до граничного значення і стає ∞-гармонічним оператором. Такий випадок використовується для опису поведінки речовин і процесів, що вимагають максимального опору деформації, як, наприклад, у задачах про рівновагу і екстремальні умови в фізиці.

Розділ 1

Постановка задачі

Дана задача цілком і повністю відповідає задачі Коші-Діріхле, яка була досліджена у спільній статті зі Стєпановою К. В. [3]. Так, в області $Q = (0, T) \times \Omega, \quad \Omega = \Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\}, \quad n \geq 1, \quad 0 < T < \infty,$ $R < \infty$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u|^{q-1}u\right) - \psi(t)\Delta_p u = 0, \quad \psi(t) > 0, \quad p > q \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma(1)} = \tilde{f}(t, x); \; u|_{\Gamma(R)} = 0; \tag{1.2}$$

$$u(0, x) = u_0 \in L_{q+1}(\Omega); \tag{1.3}$$

$$\text{supp } u_0 \in \{x \in R^n : |x| < d\}, 1 < d < R. \tag{1.4}$$

$$\Gamma(\text{s}) \equiv (0, \; \text{T}) \times \partial B(s),$$

$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\}.$$

Виконана наступна структурна умова:

$$0 < q < p. \tag{1.5}$$

Отже, рівняння (1.1) належить до класу рівнянь «повільної дифузії». Граничну функцію $\tilde{f}$ можна розглядати як слід функції $f(t, x)$ на $\Gamma(1)$, де $f(t, x)$ задовольняє такі властивості:

$$f \in L_\infty\left((0, T_0) \times \Omega\right) \cap L_{p+1}\left(0, T_0; W^1_{p+1}(\Omega)\right) \quad \forall T_0 < T, \tag{1.6}$$

$$\text{supp} f \in [0, T] \times \text{B}\left(R_0\right), R_0 < R, \tag{1.7}$$

$$f_t' \in L_1\left(0, T_0; L_{q+1}(\Omega)\right) \cap L_{\frac{p+1}{p-q+1}}\left(0, T_0; L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)\right) \quad \forall T_0 < T. \tag{1.8}$$

Функція, що описує особливості загострення граничного режиму, має вигляд:

$$\begin{aligned} F(t) \equiv \int_\Omega |f(t,x)|^{q+1} dx + \\ + \int_0^t \psi(\tau) \int_\Omega |D_x f(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau + \\ \int_0^t \psi(\tau)^{\frac{-q}{p-q+1}} \int_\Omega |f_\tau'(\tau,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dx d\tau + \\ + \left(\int_0^t \left(\int_\Omega |f_\tau'(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1} \forall t < T. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Система рівнянь (1.1) – (1.5) слугує моделлю розподілу концентрації речовини з урахуванням початкових та крайових умов у просторі й часі. Вибір області Ω у задачі (1.1) – (1.5) зумовлений прагненням уникнути зайвих громіздких (хоча й очевидних) обчислень і побудов. Усі отримані результати справедливі також для областей, які мають вигляд $B(R)\cap(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, $R < \infty$. При цьому область Ω є довільною однозв'язною областю з C^1– гладкою границею $\partial\Omega$, яка задовольняє умову $\overline{\Omega} \subset B(R)$.

У подальших викладках застосовуватимуться також такі області:

$$\Gamma_a^b(\mathrm{s}) \equiv (a,b) \times \partial B(s),$$

$$Q_a^b = (a,b) \times \Omega(s),$$

$$\Omega(s) = \Omega_R \setminus B(s), \quad \forall s > 1.$$

Розділ 2

Необхідні означення

Цей розділ присвячений основним означенням, які матимуть ключове значення для даної роботи.

2.1. Енергетичний узагальнений розв'язок

Означення 2.1. Функція $u(t,x)$ називається узагальненим (енергетичним) розв'язком задачі (1.1) – (1.5) за умови, що виконується наступна інтегральна тотожність для будь-якого $T_0 < T$:

$$\int_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \eta \rangle dt - \int_0^{T_0} \int_\Omega \psi(t) \Delta_p u \eta_{x_i} dx dt = 0, \tag{2.1}$$

де $\eta(t,x)$ є довільною функцією з простору $L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega))$,
і задовольняються такі умови для забезпечення збіжності інтегралів::

1. $u - f \in L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}\,(\Omega, \partial\Omega)) \cap L_\infty(0); T_0; L_{q+1}(\Omega))$;
2. $(|u|^{q-1})'_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0,T_0; (W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega))^*)$

   та виконана початкова умова (1.3) в такому інтегральному сенсі:

$$\int\limits_0^{T_0} \langle (|u|^{q-1}u)'_t, \zeta \rangle dt + \int\limits_0^{T_0} \int\limits_\Omega (|u|^{q-1}u - |u_0|^{q-1}u_0) \zeta'_t dx dt = 0$$

   де $\zeta(t,x)$ – будь-яка пробна функція, яка належить простору $L_{p+1}(0,T_0; W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega)) \cap W^1_1(0,T_0; L_\infty(\Omega))$ та зникає в околі $t = T_0$;

3. початкове та граничне значення $f(t,x)$ відповідають умові узгодження:

$$f(0,x) - u_0(x) \in W^1_{p+1}(\Omega, \partial\Omega);$$

Позначення $W^1_r(\Omega, S)$ у цій роботі використовується для замикання за нормою $W^1_r(\Omega)$ множини функцій із класу $C^\infty(\Omega)$, які зникають в околі $S \subset \subset \partial\Omega$; при цьому $W^1_r(\Omega) \equiv W^1_r(\Omega, \varnothing)$.

Робота [4] містить доведення існування енергетичного (узагальненого) розв'язку для задачі Коші-Дірихле з ширшим класом еліптичних операторів, що для рівняння (1.1) виконуються завдяки першій та другій умовам Означення 2.1. Згідно з результатами роботи [5] третя умова в означенні узагальненого розв'язку гарантує єдиність розв'язку для задачі (1.1) – (1.5) в сенсі Означення 2.1.

2.2. Носій розв'язку

Означення 2.2. Носієм розв'язку $u(t,x)$ називається замикання множини $\operatorname{supp} u(t,\cdot)$, тобто

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(t,x) \neq 0\}}.$$

Варто звернути увагу, що для рівняння з градієнтною нелінійністю, яке було обговорено у вступній частині:

$$u_t - \Delta_p u = 0,$$

існує автомодельний розв'язок, пов'язаний з граничною функцією виду

$$f(t) = k(T-t)^{-n}, \quad n \text{ – розмірність простору.}$$

Аналіз структури отриманого розв'язку показує, що наявність граничного режиму не порушує властивості локалізації, яка зберігається за умови $n = (p-1)^{-1}$, де $p > 1$.

Варто зазначити, що ці та подібні результати були отримані за допомогою бар'єрного методу, пов'язаного з побудовою різних автомодельних розв'язків. Однак цей підхід принципово не підходить для рівнянь, де неможливо застосувати відповідні теореми порівняння. Це обґрунтовує важливість розробки альтернативних методів аналізу та їх ефективного використання для вивчення поведінки узагальненого розв'язку початково-крайової задачі для рівняння (1.1), де неможливо знайти автомодельний розв'язок. Саме на цьому було зосереджено дослідження, представлене в даній роботі.

2.3. Властивість локалізації

Означення 2.3. Задача (1.1) – (1.5) володіє властивістю локалізації, якщо її енергетичний розв'язок $u(t,x)$ задовольняє таку умову:

$$\zeta(t) \equiv \inf\{r : \operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset B(r)\} < R \quad \forall t < T. \tag{2.2}$$

Розділ 3
Допоміжні нерівності та леми для доведення основного результату

3.1. Допоміжні нерівності

Для того, аби довести основний результат цієї роботи, буде використано кілька відомих нерівностей, які наводяться нижче.

Інтерполяційна нерівність [6]:

$$\|v\| L_{p+1(\partial\Omega(s))} < C_1 \left\| D_x v \right\|^{\theta}_{L_{p+1(\Omega(s))}} \|v\|^{1-\theta}_{L_{q+1(\Omega(s))}}, \tag{3.1}$$

тут

$$v \in W^1_{p+1}(\Omega(s), \partial B(R)),$$

$$\Omega(s) = \Omega_R \setminus B(s), \quad \forall s > 1,$$

$$\Omega_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < R\},$$

$$B(s) = \{x \in R^n : |x| < s\} \quad \forall s > 1,$$

$$0 < \theta := \frac{(q+1) + n(p-q)}{(p+1)(q+1) + n(p-q)} < 1.$$

Нерівність Юнга з параметром ε [7]:

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q, \tag{3.2}$$

тут

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

Нерівність Пуанкаре [8]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.3}$$

тут

$$1 \le p < n;$$

Нерівність Фрідріхса [9]:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le d^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \tag{3.4}$$

тут

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n; \qquad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Нерівність Гальярдо (p = 1) та Соболєва (p > 1) [10]:

$$\|u\|_{L_r(\Omega)}^2 \le C\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

для

$$1 \le p < n.$$

3.2. Допоміжні твердження

У цьому підрозділі наведено деякі допоміжні леми, які є необхідними для доведення основного результату даної роботи. Як це було попередньо зазначено та детально обґрунтовано в [3], леми формулюють важливі оцінки, що використовуються для забезпечення коректності та остаточної завершеності доведення Теореми 4.1.

3.2.1. Лема 3.1

Лема 3.1. *Нехай $u(t,x)$ – це узагальнений розв'язок задачі (1.1) - (1.5); в такому випадку справедлива оцінка:*

$$\int_\Omega |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_a^b \int_\Omega \psi(t)\,|D_x u|^{p+1}\,dxdt \le$$
$$\le c_1 \int_\Omega |u(a,x)|^{q+1}\,dx + c_2\left(1+\zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)F_1(a,b),$$

де

$$F_1(a,b) = \int_\Omega |f(b,x)|^{q+1}\,dx + \int_a^b \psi(t)\int_\Omega |D_x f|^{p+1}\,dxdt+$$
$$+\left(\int_a^b \|f_t'(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)}dt\right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}}\int_\Omega \|f_t'(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)}dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

Доведення.

За умов $0 \le a < b < T$ та з урахуванням формули інтегрування частинами [4], можемо записати наступну рівність:

$$\int_a^b \int_\Omega \langle \left(|u|^{q-1}u\right)_t, (u-f)\rangle dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1}\int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q+1} - |u(a,x)|^{q+1}\right)dx+$$
$$+\int_a^b\int_\Omega \left(|u(t,x)|^{q-1}u(t,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right)f_t'(t,x)dxdt-$$
$$-\int_\Omega \left(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\right)f(b,x)dx. \tag{3.5}$$

Підставимо пробну функцію $\eta = (u(t,x) - f(t,x))$ в другий доданок інтегральної тотожністі (2.1):

$$-\int_Q \psi(t)\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(u-f)\right)dxdt =$$

$$= \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(u-f)dxdt =$$
$$= \int_Q \psi(t) \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt - \int_Q \psi(t) \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}dxdt,$$

$Q = (0, T) \times \Omega.$

Такий перехід дозволяє врахувати вплив часткових похідних $u(t, x)$ і його відхилення від граничної умови через інтегральні вирази, полегшуючи аналіз властивостей даного розв'язку.

Підставляючи пробну функцію в інтегральну тотожність (2.1) і беручи до уваги рівність (3.5) та останню викладку, маємо:

$$\frac{q}{q+1}\int_\Omega |u\,(b,x)|^{q+1}\,dx + \int_Q \psi(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p+1} dxdt \leq$$
$$\leq \frac{q}{q+1}\int_\Omega |u\,(a,x)|^{q+1}\,dx -$$
$$- \int_a^b\int_\Omega \Big(|u\,(t,x)|^{q-1}\,u\,(t,x) - |u\,(a,x)|^{q-1}\,u\,(a,x)\Big)\, f_t'(t,x)dxdt +$$
$$+ \int_\Omega \big(|u(b,x)|^{q-1}u(b,x) - |u(a,x)|^{q-1}u(a,x)\big)\, f(b,x)dxdt +$$
$$+ \int_Q \psi(t)\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}dxdt. \tag{3.6}$$

Далі оцінюємо зверху доданки з правої частини нерівності (3.6), застосовуючи нерівності (3.1) – (3.4) стандартним чином:

$$I_1 = \int_a^b\int_\Omega |u(a,x)|^q\,|f_t'(t,x)|\,dxdt \leq \varepsilon_1\|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} +$$
$$+ c_1\,(\varepsilon_1)\left(\int_a^b\left(\int_\Omega |f_t'(t,x)|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}} dt\right)^{q+1};$$

$$I_2 = \int_a^b \int_\Omega |u(t,x)|^q \, |f_t'(t,x)| \, dxdt \le \int_a^b \left(\int_\Omega |u(t,x)|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$
$$\times \left(\int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} \, dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \int_a^b \psi(t)^{\frac{q}{p+1}} \zeta(t)^q \left(\int_\Omega |D_x u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{q}{p+1}} \times$$
$$\times \psi(t)^{-\frac{q}{p+1}} \left(\int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} \, dx \right)^{\frac{p-q+1}{p+1}} dt \le \varepsilon_2 \int_a^b \psi(t) \int_\Omega |D_x u|^{p+1} \, dxdt +$$
$$+ c\,(\varepsilon_2)\, \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} \, dxdt,$$

тут $\zeta_1(s) = \sup\limits_{0 \le t < s} \zeta(t)$, $\zeta(t)$ з Означення 2.3;

$$I_3 = \int_\Omega \left(|u(b,x)|^q + |u(a,x)|^q \right) |f(b,x)| dx \le$$
$$\le \varepsilon_1 \left[\|u(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + \|u(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} \right] + c_2(\varepsilon_1) \|f(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)};$$
$$I_4 = \int_a^b \int_\Omega \psi(t) \, |D_x u|^p \, |D_x f| \, dxdt \le$$
$$\le c \left(\int_Q \psi(t) \left(|D_x u|^{p+1} \, dxdt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}} \le$$
$$\le \varepsilon_3 \left(\int_Q \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt \right) + c_3\,(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

Враховуючи оцінку (3.6) і поєднуючи всі отримані оцінки для інтегралів $I1 - I4$, ми отримуємо глобальну апріорну оцінку:

$$\left(\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \right) \|u\,(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_Q \psi(t) \, |D_x u|^{p+1} \, dxdt \le$$
$$\le \left(\frac{q}{q+1} + 2\varepsilon_1 \right) \|u\,(a,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}} + c(\varepsilon_2) \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}} \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \times$$
$$\times \int_\Omega |f_t'(t,x)|^{\frac{p+1}{p-q+1}} dxdt + c_1(\varepsilon_1) \left(\int_a^b \left(\int_\Omega |f_t'(t,x)|^{q+1} \, dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \right)^{q+1} +$$
$$+ c_2\,(\varepsilon_1)\, \|f\,(b,x)\|^{q+1}_{L_{q+1}(\Omega)} + c_3\,(\varepsilon_3) \left(\int_Q \psi(t) |D_x f|^{p+1} dxdt \right).$$

Задаємо ε_1 та ε_2 у фінальній нерівності, аби була виконана умова

$$\frac{q}{q+1} - \varepsilon_1 \ge \frac{q}{2(q+1)}; \quad (1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \ge \frac{1}{2},$$

отримаємо наступне:

$$\int_{\Omega} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_a^b \int_{\Omega} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, dxdt \le$$
$$\le c_1 \int_{\Omega} |u(a,x)|^{q+1}\, dx + c_2 \left(1 + \zeta_1(b)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right) F_1(a,b), \text{ де}$$
$$F_1(a,b) = \int_{\Omega} |f(b,x)|^{q+1}\, dx + \int_a^b \psi(t) \int_{\Omega} |D_x f|^{p+1}\, dxdt +$$
$$+ \left(\int_a^b \|f_t'(t,x)\|_{L_{q+1}(\Omega)} dt\right)^{q+1} + \int_a^b \psi(t)^{-\frac{q}{p-q+1}} \int_{\Omega} \|f_t'(t,x)\|^{\frac{p+1}{p-q+1}}_{L_{\frac{p+1}{p-q+1}}(\Omega)} dt,$$
$$F_1(0,b) = F(b).$$

□

3.2.2. Лема 3.2

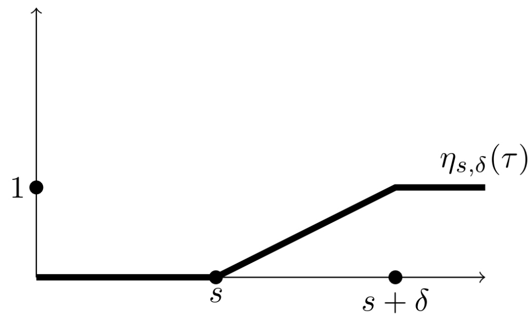
Лема 3.2. *Нехай $u(t,x)$ є узагальненим розв'язком для початково-граничної задачі (1.1) — (1.5); у такому випадку виконується наступна нерівність:*

$$\frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1} dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, dxdt \le$$
$$\le \frac{q}{q+1} \int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\, dx + c \left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\, |D_x u|^{p+1}\, d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$
$$\times \left(\int_{Q_a^b(s)} \psi(t) |D_x u|^{p+1} dxdt\right)^{\frac{\theta}{p+1}} \left(\int_a^b \psi(t) \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx\right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt\right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}.$$

Доведення.

Задамо значення $s > 1$ та $\delta > 0$;

$$\eta_{s,\delta}(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < s; \\ \dfrac{\tau - s}{\delta}, & s \le \tau \le s + \delta; \\ 1, & \tau > s + \delta. \end{cases}$$



Профіль функції $\eta_{s,\delta}(\tau)$.

Для інтегральної тотожності обираємо пробну функцію у вигляді: $\eta(t,x) = u(t,x)\eta_{s,\delta}(|x|)$.

$$\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)|D_x u|^{p+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(a,x)|^{q+1}\eta_{s,\delta}(|x|)dx -$$
$$-\int_{Q_a^b(s)\setminus Q_a^b(s+\delta)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}\left(|D_x u|^{p+1}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)u(\eta_{s,\delta}(|x|)_{x_i}dxdt.$$

Переходячи до границі при $\delta \to 0$, аналогічно до методу, описаного в [6], отримуємо:

$$\frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} |u(b,x)|^{q+1}dx + \int_{Q_a^b(s)} \psi(t)\left|D_x u\right|^{p+1}dxdt =$$
$$= \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} \left|u(a,x)\right|^{q+1}dx + \int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\sum_{i=1}^{n}\left|D_x u\right|^{p+1}u\nu_i d\gamma dt \leq$$
$$\leq \frac{q}{q+1}\int_{\Omega(s)} \left|u(a,x)\right|^{q+1}dx + c\left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)\left|D_x u\right|^{p+1}d\gamma dt\right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$
$$\times\left(\int_{\Gamma_a^b(s)} \psi(t)|u|^{p+1}d\gamma dt\right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Тепер оберемо:

$$[a,b] = [t_{j-1}, t_j]\,, \quad [0,T) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [t_{j-1}, t_j]\,, \quad t_0 = 0.$$

і оцінимо доданок у правій частині попередньої нерівності, застосувавши інтерполяційне співвідношення (3.1):

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \int_{\partial\Omega(s)} |u|^{p+1} d\gamma dt \le \\
&\le c \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega(s)} \psi^{\theta}(t) \|u\|^{p+1}_{L_{(p+1)\theta}(\Omega(s))} \psi(t)^{1-\theta} \|u\|^{(p+1)(1-\theta)}_{L_{p+1}(\Omega(s))} d\gamma dt \le \\
&\le c \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \|D_x u\|^{p+1}_{L_{p+1}(\Omega(s))} dt \right)^{\theta} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \|u\|^{p+1}_{L_{q+1}(\Omega(s))} dt \right)^{1-\theta},
\end{aligned}$$

після чого нерівність набуває наступного вигляду

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(s)} |u(t_j, x)|^{q+1} dx \le \int_{\Omega(s)} |u(t_{j-1}, x)|^{q+1} dx + \\
&+ c \left(\int_{\Gamma_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t) |D_x u|^{p+1} d\gamma dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{Q_{t_{j-1}}^{t_j}(s)} \psi(t) |D_x u|^{p+1} dx dt \right)^{\frac{\theta}{p+1}} \times \\
&\times \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{\frac{p+1}{q+1}} dt \right)^{\frac{1-\theta}{p+1}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Після інтегрування по $t \in (a,b)$ це дає, у свою чергу, результат Леми 3.2.

$\square$

Розділ 4

Основний результат

4.1. Теорема про достатню умову локалізації розв'язку

Тепер перейдемо до основного результату даної кваліфікаційної роботи, який було опубліковано у спільній зі Стєпановою К. В. науковій статті [3].

Теорема 4.1. *Припустимо, що граничний режим задачі Коші–Діріхле для нелінійного параболічного рівняння (1.1) – (1.5) задовольняє умову:*

$$F(t) \leqslant c\left(\int_t^T \psi(\tau)d\tau\right)^{-\frac{q+1}{p-q}} \quad \forall t < T. \tag{4.1}$$

Тоді існують такі константи $c_i < \infty$, що акумулюють та зберігають значення відомих нерівностей (наприклад, нерівності Пуанкаре, інтерполяційної нерівності тощо), які застосовувалися при аналізі та оцінюванні інтегралів, та константи $d < \infty$, що не залежать від зовнішнього радіуса R області Ω, для яких початково-гранична задача (1.1) – (1.5) володіє властивістю локалізації.

4.2. Доведення теореми

Далі будуть представлені послідовні етапи доведення основного результату [3].

Розглянемо два сімейства функцій, пов'язаних з $u(t, x)$:

$$h_j(s) = \text{ess sup}_{t\in[t_{j-1},t_j]} \int_{\Omega(s)} |u(t,x)|^{q+1}dx;$$

$$E_j(s) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \int_{\Omega(s)} |D_x u(t,x)|^{p+1} dxdt;$$

та монотонну послідовність:

$$t_j \to T, \quad t_0 = 0; \quad t_{j-1} < t_j, \quad j = 1, 2 \ldots.$$

Через те, що

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) \int_{\partial B(s)} |D_x u(t,x)|^{p+1} d\gamma dt = -\frac{d}{ds} E_j(s),$$

то (3.7) після того, як було застосовано нерівність Юнга з ε (3.2), у нових позначеннях $h_j(s)$ і $E_j(s)$ дозволяє отримати диференціальну систему:

$$E_j(s) \le r_1 h_{j-1}(s) + r_2 \alpha_j^{\nu} \left(-\frac{dE_j(s)}{ds} \right)^{1+\mu}, \tag{4.2}$$

$$h_j(s) \le (1+\delta_j)\, h_j(s) + r_3 \delta_j^{\frac{-(p+1)\nu}{q+1}} \alpha_j^{\nu} \left(-\frac{dE_j}{ds} \right)^{1+\mu}, \tag{4.3}$$

$$\forall s > 1, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta_j > 0,$$

де сталі $r_1, r_2, r_3 < \infty$ залежать виключно від відомих параметрів

$$\nu = \frac{(1-\theta)(q+1)}{q(p+1)+\theta(p-q)} < 1; \quad \mu = \frac{(1-\theta)(p-q)}{q(p+1)+\theta(p-q)}; \quad \alpha_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi(t) dt.$$

Для зручності помножимо обидві частини функцій, введених на початку доведення, на $\alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}}$:

$$A_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} E_j(s); \quad H_j(s) = \alpha_j^{\frac{q+1}{p-q}} h_j(s) \Rightarrow$$

тоді стає очевидним, що нерівності (4.2) та (4.3) набувають такого вигляду:

$$A_j(s) \le r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s) \right)^{1+\mu},$$

$$H_j(s) \leq (1+\delta_j)\,\alpha_{j-1}^{\frac{q+1}{p-q}} h_{j-1}(s) + + r_3' \delta_j^{-\frac{(p+1)\nu}{q+1}} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}.$$

Послідовність $\{\delta_j\}$ та розбиття $\{t_j\}$ обираємо таким чином, аби забезпечити виконання строгої нерівності:

$$(1+\delta_j) < \lambda = \text{const} \ < 1.$$

В результаті отримуємо:

$$A_j(s) \leq r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{4.4}$$

$$H_j(s) \leq \lambda H_{j-1}(s) + r_3 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \tag{4.5}$$

Ітеративне застосування співвідношення (4.4), оцінюючи при цьому послідовно в правій частині всі $H_i(s)$ і врахувуючи (4.5), дає серію послідовних нерівностей:

$$\begin{aligned}
A_j(s) \leqslant & r_4 H_{j-1}(s) + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \leqslant \\
\leqslant & r_4 \lambda H_{j-2}(s) + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \leqslant \\
\leqslant & r_4 \lambda^2 H_{j-3}(s) + r_4 r_3 \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} + \\
& + r_4 r_3 \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + r_2 \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu} \leqslant \\
& \leqslant \cdots \leqslant r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_4 r_3 \Big[\lambda^{j-2} \left(-A_1'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda^{j-3} \left(-A_2'(s)\right)^{1+\mu} + \\
& + \cdots + \lambda^2 \left(-A_{j-3}'(s)\right)^{1+\mu} + \lambda \left(-A_{j-2}'(s)\right)^{1+\mu} + \\
& + \left(-A_{j-1}'(s)\right)^{1+\mu} + \frac{r_2}{r_3 r_4} \left(-A_j'(s)\right)^{1+\mu}\Big] \leqslant \\
\leqslant & r_4 \lambda^{j-1} H_0(s) + r_5 \sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}} A_i'(s)\right)^{1+\mu},
\end{aligned}$$

де $r_5 = \dfrac{r_3 r_4}{\lambda} \max\left(1, \dfrac{\lambda r_2}{r_3 r_4}\right)$.

Це дозволяє отримати остаточний результат:

$$A_j(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left[\sum_{i=1}^{j} \left(-\lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i'(s) \right) \right]^{1+\mu} . \quad (4.6)$$

Введемо сімейство невід'ємних функцій:

$$U_j(s) \equiv \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(s), \quad j = 1, 2 \dots .$$

і зауважимо, що має місце така рівність

$$A_j(s) = U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s)$$

Це дозволяє переписати співвідношення (4.6) у такій формі:

$$U_j(s) - \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) \leq r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s) \right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

тобто

$$U_j(s) \leq \lambda_j^{\frac{1}{1+\mu}} U_{j-1}(s) + r_4 \lambda^{j-1} \left(\int_0^T \psi(t) dt \right)^{\frac{q+1}{p-q}} h_0(s) + r_5 \left(-U_j'(s) \right)^{1+\mu} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} A_i(1) = \sum_{i=1}^{j} \lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}} \alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}} E_i(1) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Для того, аби оцінити зверху $E_i(1)$, скористаємося нерівністю з Леми 3.1 при $a=0,\ b=t_j$, що дає наступний результат:

$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1}dx + \int_0^{t_j}\int_\Omega |D_x u|^{p+1}\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant c_1\int_\Omega |u(0,x)|^{q+1}dx + c_2\left(1+\zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)F_1(0,t_j);$$
$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1}dx + E_j(1) \leqslant$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2\left(1+\zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)F_1(t_j);$$
$$\int_\Omega |u(t_j,x)|^{q+1}dx + E_j(1) \leqslant$$
$$\leqslant c_1 h_0(1) + c_2\left(1+\zeta_1(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)C;$$

Тоді,

$$E_j(1) \leqslant c_1 h_0(1) + c_3\left(1+\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right).$$

Відповідно,

$$U_j(1) = \sum_{i=1}^{j}\lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}}\alpha_i^{\frac{q+1}{p-q}}\left[c_1 h_0(1) + c_3\left(1+\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)\right] \leq$$
$$\leq h_0(1)\sum_{i=1}^{j}\lambda^{\frac{j-i}{i+\mu}}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi(t)dt\right)^{\frac{q+1}{p-q}}\left[c_1 + c_3\left(1-\lambda^{\frac{1}{1+\mu}}\right)^{-1}\left(1+\zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right)\right].$$

Таким чином, за умови, що

$$\sum_{i=1}^{j}\lambda^{\frac{j-i}{1+\mu}}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi(t)dt\right)^{\frac{q+1}{p-q}} \leq \text{ const}$$

отримуємо оцінку:

$$U_j(1) \leq c_4 + c_5\zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}.$$

Це приводить нас до диференціальної системи нерівностей.

$$U_j(s) \leq c_6 U_{j-1}(s) + c_7\left(-U_j'(s)\right)^{1+\mu}, \quad \forall s > d;$$

$$U_j(d) \le c_4 + c_5\zeta(t_j)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Далі, з цієї системи, використовуючи Лему 6.3 статті [11], отримуємо рівномірну оцінку для носіїв функцій $U_j(s)$:

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant \sup\left\{s : s \in \operatorname{supp} U_j\right\} \leqslant c_8 \left[c_4 + c_5 + c_5\zeta_1\left(t_j\right)^{\frac{q(p+1)}{p-q+1}}\right]^{\frac{\mu}{1+\mu}} + d,$$

тут $c_8 = \left(\dfrac{c_7}{1-{}_6}\right)^{\frac{1}{1+\mu}} \dfrac{1+\mu}{\mu}$.
З останньої нерівності маємо

$$\zeta\left(t_j\right) \leqslant d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\zeta_1\left(t_j\right)^{\varkappa} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

де

$$\varkappa = \frac{q(p+1)(p-q)}{(p-q+1)[n(p-q)+(q+1)(p+1)]} < 1 \quad \forall n \geqslant 1, \quad p > q.$$

Для того, аби завершити доведення, залишається отримати оцінку зверху для $\zeta(t)$ на множині

$$S = \left\{t \in (0,T) : \zeta(t) = \zeta_1(t)\right\}. \tag{4.8}$$

Виберемо довільну точку $\tilde{t}$:

$$\tilde{t} \in [T_0, T) \cap S, \quad \tilde{t} = t_{j_0}, \quad j_0 \in \mathbb{N}.$$

Враховуючи співвідношення (4.7) і означення (4.8), отримуємо:

$$\begin{aligned}\zeta(\tilde{t}) = \zeta\left(t_{j_0}\right) &\leqslant d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\zeta(\tilde{t})^{\varkappa} \leqslant \\ &\leqslant d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + \varepsilon\zeta(\tilde{t}) + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}},\end{aligned}$$

Це веде до наступної оцінки:

$$\zeta(\tilde{t}) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] \equiv D(\varepsilon).$$

Розглянемо

$$D(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-1}\left[d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}}\right] = \frac{D_0}{1-\varepsilon} \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{4.9}$$

Усі константи c_i, що з'являлися у вищенаведених розрахунках, не залежать від зовнішнього радіуса R області Ω. Тому при виконанні умови

$$d + c_8\left(c_4+c_5\right)^{\frac{\mu}{1+\mu}} + c_9(\varepsilon)\left(c_8 c_5^{\frac{\mu}{1+\mu}}\right)^{\frac{1}{1-\varkappa}} < R \tag{4.10}$$

існує $\varepsilon_0 > 0$, що задовольняє умові

$$\zeta(\tilde{t}) < D(\varepsilon) < R \quad \forall\tilde{t} \in [T_0, T)\,. \tag{4.11}$$

Дана оцінка еквівалентна наявності властивості локалізації граничної задачі при R, що задовольняє умовам (4.10), (4.11). Отже, основний результат роботи, сформульований у Теоремі 4.1, доведено.

Висновки

Метою цієї кваліфікаційної роботи було доведення достатньої умови локалізації узагальненого розв'язку для початково-крайової задачі нелінійного параболічного рівняння за умов повільної дифузії (Теорема 4.1). Вона була досягнута шляхом виведення необхідних інтегральних співвідношень і нерівностей, що описують поведінку розв'язку у визначених межах.

Завдяки проведеній роботі було сформульовано та доведено важливу теорему, яка встановлює, при яких умовах розв'язок має властивість локалізації для довільної початкової функції та заданих крайових умов.

Результати роботи можуть бути корисними для моделювання фізичних процесів, таких як дифузія та теплопровідність, оскільки вони дозволяють точніше передбачити розподіл концентрації речовини або температури в обмеженій області. Такі результати мають практичне значення в галузях, де важливо враховувати локалізацію процесів, як-от, наприклад, матеріалознавство, екологія та інженерія, а також вони можуть стати основою для подальших досліджень у теорії нелінійних параболічних рівнянь.

Список використаних джерел

[1] Шевчук Дарина. Достатня умова локалізації розв'язку змішаної задачі для параболічних рівнянь: кваліфікаційна робота студента 4 курсу першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, спеціальність 113 «Прикладна математика», освітньо-професійна програма «Прикладна математика» – Харків: Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2023.

[2] Stiepanova K., Shevchuk D. Localization of a solution to a mixed problem of PDE. Proceedings of the 6-th International Conference «Differential Equations and Control Theory» (DECT 2023). P. 31.

[3] Shevchuk D., Stiepanova K. The behavior of the generalized solution of the initial-boundary value problem for the nonlinear parabolic equation, Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2024. V. 99, P. 4-21.

[4] Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 1983. V. 183(3). P. 311–341.

[5] Benilan Ph., Wittbold P. On mild and weak solutions of elliptic-parabolic problems, Adv. Differential Equations. 1996. V. 1(6). P. 1053–1073.

[6] Diaz J. I., Veron L. Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations, Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290(2). P. 787–814.

[7] Hardy G. H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. Cambridge University Press. 1952. P. 324.

[8] Poincare H. Sur les Equations aux Derivees Partielles de la Physique Mathematique, American Journal of Mathematics. 1890. V. 12(3). P. 211–294.

[9] Rektorys K. The Friedrichs Inequality. The Poincare inequality. Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering (2nd ed.). Dordrecht: Reidel. 1977. P. 188–198.

[10] Gagliardo E. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in the most variabili. Ricerche Mat. 1959. V. 8. P. 24–51.

[11] Shishkov A. E., Shchelkov A. G. Blow-up boundary regimes for general quasilinear parabolic equations in multidimensional domains, Sb. Math. 1999. V. 190(3). P. 447–479.

[12] Antontsev, S. N. On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations, Sov. Math., Dokl. 1981. V. 24. P. 420-424.

[13] Mel'nyk Taras, Krenevych Andrii. Theory of Sobolev Spaces and Weak Solutions to Boundary-Value Problems. 2020.

[14] Gilding B. H., Herrero M. A. Localization and blow-up of thermal waves in nonlinear heat conduction, Math. Ann. 1988. V. 282. P. 223–242.

[15] Cortazar C., Elgueta M. Localization and boundedness of the solutions of the Neumann problem for a filtration equation, Nonlinear Anal. 1989. V. 13(1). P. 33–41.